



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 08.02.2025

CLASA a 11-a

SUBIECTE

Problema 1

Fie $a \in (0, \infty)$. Calculați, în funcție de a , $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left\{ a \cdot \frac{n+1}{n} \right\} + \left\{ a \cdot \frac{n}{n+1} \right\} \right)$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x .

Gazeta matematică

Problema 2

Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$ cu $\det(A) = 1$ și cu proprietatea că pentru orice $B \in M_2(\mathbb{C})$ există $k \in \mathbb{N}^*$ (care depinde de B) astfel încât $A^k B = B A^k$. Arătați că există $p \in \mathbb{N}^*$ cu $A^p = I_2$.

Problema 3

Se consideră șirul convergent $(x_n)_{n \geq 0}$ cu $x_0 \in \mathbb{R}$ și $x_{n+1} = x_n^2 - 6$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Arătați că există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n = x_k$, oricare ar fi $n \geq k$.

Problema 4

Fie $A, B, C, D \in M_2(\mathbb{C})$ cu $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(C) = \operatorname{tr}(D) \neq 0$ și $A^3 + B^3 = C^3 + D^3$.

a) Arătați că $\det(A) + \det(B) = \det(C) + \det(D)$.

b) Arătați că $(A - B)^2 = (C - D)^2$ dacă și numai dacă $\det(A + B) = \det(C + D)$.